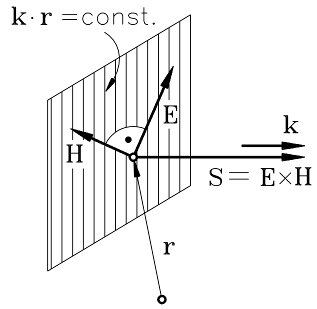
Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	Formelsammlung elektromagnetische Wellen Seite 1

Harmonische, ebene Welle in verlustfreiem Medium



$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 Re\left\{\exp\left(\mathrm{j}\left[\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right]\right)\right\} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{Z_0}\left(\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{E}\right) \\ \mathbf{r} &= x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Kreisfrequenz	$\omega = 2\pi f$
Wellenzahl	$k = \omega/c = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$
Wellenlänge	$\lambda = 2\pi/k$
Ausbreitungsgeschwindigkeit	$c = \lambda f = \omega/k = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, $c_0 \approx 3\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Wellenwiderstand	$Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, $Z_0 \approx 120\,\pi\,\Omega$

Verlustbehaftetes Medium

$$\varepsilon \quad \rightarrow \quad \varepsilon_k = \varepsilon\left(1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)$$ **komplexe DK.**

$$k \quad \rightarrow \quad \beta - \mathrm{j}\,\alpha$$

Dämpfungskonstante α
Phasenkonstante β

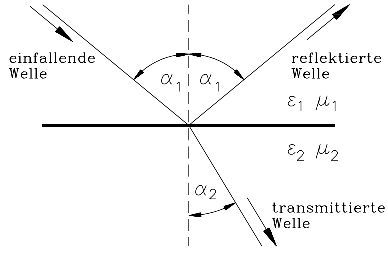
$$= \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} \mp 1\right)}$$

Phasengeschw. $v_{\mathrm{ph}} = \dfrac{\omega}{\beta}$, **Gruppengeschw.** $v_{\mathrm{gr}} = \dfrac{\partial\omega}{\partial\beta}$

Reflexion und Brechung ebener Wellen

Brechungsindex $n = \dfrac{c_0}{c} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$

Brechungsgesetz (Snellius) $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \dfrac{n_2}{n_1}$



Brewsterwinkel $\tan\alpha_{1,Brewster} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

(Verschwinden der Reflexion einer p–polarisierten Welle)

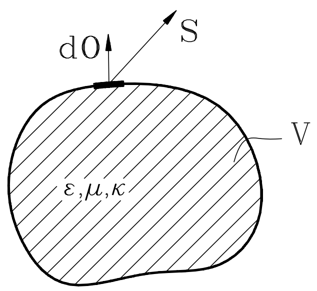
Totalreflexion $\alpha_1 > \alpha_{1G}$, $\sin\alpha_{1G} = \dfrac{n_2}{n_1}$

(Übergang vom *opt. dichteren* ins *opt. dünnere* Medium $n_1 > n_2$)

Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	Formelsammlung elektromagnetische Wellen Seite 2

Energieerhaltung im zeitveränderlichen, elektromagnetischen Feld

Die zeitliche Abnahme der in einem Volumen gespeicherten elektrischen und magnetischen Energie deckt die im Volumen entstehenden Verluste sowie die nach außen durch die Hüllfläche des Volumens mit der Dichte $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ transportierte Leistung.



$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V w \, \mathrm{d}V = \oint \mathbf{S} \cdot \mathrm{d}\mathbf{O} + \int_V p_V \, \mathrm{d}V$$

Energiedichte $w(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{2}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$

Verlustleistungsdichte $p_V(\mathbf{r},t) = \mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$

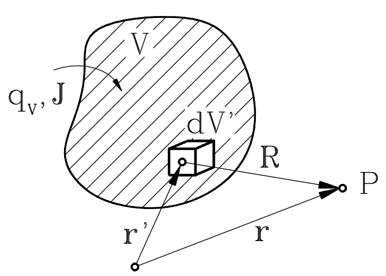
Poyntingscher Vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ (Strahlungsleistungsdichte)

Zeitliche Mittelwerte bei harmonischer Zeitabhängigkeit:

$$\overline{w}_e = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^*\} \quad , \quad \overline{w}_m = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}^*\}$$

$$\overline{p}_V = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}^*\} \quad , \quad \overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\} \quad \text{(Wirkleistungsdichte)}$$

Retardierte Potentiale

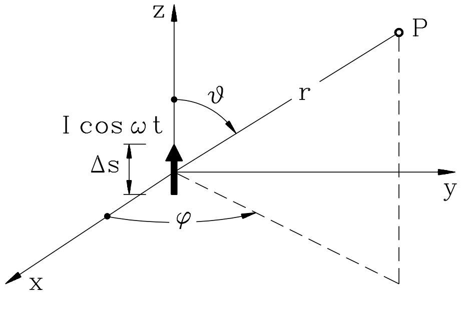


ret. Skalarpot. $$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{q_V\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c_0}\right)}{R}\,\mathrm{d}V'$$

ret. Vektorpot. $$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c_0}\right)}{R}\,\mathrm{d}V'$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

Fernfeld des Hertzschen Dipols



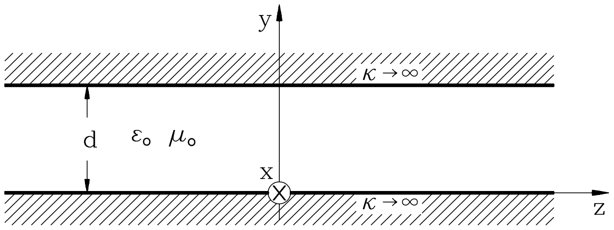
$$\mathbf{H} \approx \mathrm{j}k\,\frac{I\Delta s}{4\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\,\sin\vartheta\,\mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{E} \approx Z_0\,H_\varphi\,\mathbf{e}_\vartheta$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad , \quad k = \frac{\omega}{c_0}$$

Formelsammlung elektromagnetische Wellen

Wellen in der Parallelplattenleitung



TM–Wellen (parallele Polarisation)

$$\mathbf{E} = E_y\,\mathbf{e}_y + E_z\,\mathbf{e}_z \quad , \quad \mathbf{H} = H_x\,\mathbf{e}_x$$

TE–Wellen (senkrechte Polarisation)

$$\mathbf{H} = H_y\,\mathbf{e}_y + H_z\,\mathbf{e}_z \quad , \quad \mathbf{E} = E_x\,\mathbf{e}_x$$

Parallele Polarisation

$$\begin{aligned} E_{yn}^{(p)} &= E_{0n} \cos \frac{n\pi y}{d} \exp\left(\mp \mathrm{j} k_{zn} z\right) \\ H_{xn}^{(p)} &= \mp \frac{E_{yn}^{(p)}}{Z_{Fn}^{(p)}} \end{aligned}$$

Wellenwiderstand $Z_{Fn}^{(p)} = \dfrac{k_{zn}}{\omega\varepsilon}$, **Wellenzahl** $k_{zn} = \sqrt{k^2 - \left(\dfrac{n\pi}{d}\right)^2}$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Senkrechte Polarisation

$$\begin{aligned} E_{xn}^{(s)} &= E_{0n} \sin \frac{n\pi y}{d} \exp\left(\mp \mathrm{j} k_{zn} z\right) \\ H_{yn}^{(s)} &= \pm \frac{E_{xn}^{(s)}}{Z_{Fn}^{(s)}} \end{aligned}$$

Wellenwiderstand $Z_{Fn}^{(s)} = \dfrac{\omega\mu}{k_{zn}}$, **Wellenzahl** $k_{zn} = \sqrt{k^2 - \left(\dfrac{n\pi}{d}\right)^2}$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Dispersion

$$\left.\begin{array}{c} \textbf{Phasengeschwindigkeit} \\ v_{\mathrm{ph}} = \dfrac{c_0}{\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}} \\ \textbf{Gruppenschwindigkeit} \\ v_{\mathrm{gr}} = c_0 \sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2} \end{array}\right\} \rightarrow v_{\mathrm{ph}} \cdot v_{\mathrm{gr}} = c_0^2$$

cut–off Frequenz $\omega_c = n\pi \dfrac{c_0}{d}$